LICEO SCIENTIFICO "C.DONEGANI" – SONDRIO - ANNO SCOLASTICO 2013/14

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Sia P un punto della semicirconferenza Γ di raggio unitario PO e sia T il punto in cui la tangente a Γ in P incontra la retta contenente il diametro di Γ.

a) Posto PT=x, si esprima in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo *TOP* e quella del quadrato costruito su TO. Verificato che tale rapporto risulta essere $f(x)=\dfrac{x}{2(1+x^2)}$, si studi e si rappresenti *f(x)* prescindendo dalle limitazioni geometriche e si verifichi l'allineamento dei punti di flesso.

b) Si determini $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t)$, essendo *M(t)* la media integrale di f(x) nell' intervallo [0,t] con t>0.

c) Detto γ il grafico di *f(x)*, si consideri la regione di piano *L* delimitata da γ e dall'asse delle ascisse con $0\le x\le x_F$, essendo x_F l'ascissa del punto di flesso di γ che si trova nel primo quadrante. Si calcoli il volume del solido che ha per base *L* e le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse delle ascisse sono rettangoli di altezza x, dove x è l'ascissa del piano di sezione.

d) Sia Q il punto, diverso dall'origine, in cui la retta di equazione y=mx interseca il grafico γ di *f(x)* e sia *p* la parabola passante per O e col vertice nel punto di massimo assoluto per *f(x)*.Si determini per quali valori di m l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x=x_Q$ (con $x_Q>0$) sia uguale all'area del segmento parabolico individuato dalla parabola *p* e dall'asse delle ascisse.

Problema 2

Sia *f(x)* la funzione $y=\dfrac{x^2}{a}+\ln\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ con *a* numero reale diverso da zero.

a) Determinare il valore di *k* per il quale *f(x)* ammette un punto di flesso a tangente orizzontale.

b) Verificato che *a*=2, si studi la corrispondente funzione *f(x)* e se ne rappresenti il grafico γ.

c) Sia *p* la parabola con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per il punto P(0,-1) e tangente alla retta di equazione 2x+y=1 nel suo punto di ascissa 2. Si determini poi l'area della regione di piano delimitata da γ e dalla parabola *p* nell'intervallo [0;1].

d) Si determini il volume del solido ottenuto facendo compiere all'arco di parabola compreso tra x=0 e x=2 una rotazione di un giro completo intorno all'asse *y*.

Questionario

1. Si studi la derivabilità della funzione $f(x)$ definita per x<0 da $e^{\frac{1}{x}}$ e tale che f(0)=0.

2. Una collana è composta da perle di plastica colorate: 6 rosse, 10 arancioni e 8 gialle, chiuse con un fermaglio. Quante sono le possibili sequenze differenti? Qual è il numero delle sequenze nel caso in cui le perle agli estremi siano entrambe di colore arancione? Quale sarà tale numero quando le perle agli estremi sono di colore uguale?

3. Si determinino quali condizioni devono soddisfare i due parametri reali a e b, con $a>0$, affinché la funzione f(x) definita da $\frac{x}{x-2a}$ se x$\leq a$ e da $\frac{-x}{a}$ se x$>a$ verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[a/2; b]$. Si analizzino separatamente i casi $b\leq a$ e $b> a$.

4. Considerando ln 2 come valore esatto dell'integrale I= $\int_1^2 x^{-1}dx$ si determini, utilizzando un metodo di integrazione numerica a scelta, un'approssimazione di ln 2 con due cifre decimali.

5. Si determini il dominio della funzione $y=\sqrt{\frac{\ln(x-2)}{\ln x-2}}$.

6. Senza fare uso del teorema di De L'Hospital, si calcoli: $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\pi}-e^{x}}$.

7. Una sfera di raggio 1 è secata da due piani paralleli tra di loro e distanti 1. Si individui la posizione reciproca dei due piani affinché la somma delle aree delle sezioni così individuate sia massima.

8. Una scatola contiene 100 palline, in parte bianche e in parte nere. Si determini il numero di palline di ciascun colore sapendo che, estraendone due, la probabilità che siano dello stesso colore è uguale alla probabilità che siano di colore diverso.

9. Si determini il valore del parametro k affinché l'equazione $x+kx=k\cdot e^{x}$ ammetta due soluzioni coincidenti.

10. La seguente figura rappresenta il grafico di una funzione f e le sue tangenti nei punti O(0,0), M(3,-2), F(6,-1). La funzione è continua e derivabile almeno due volte in R e ha due flessi in O e F. Si disegni un grafico probabile della derivata prima dando adeguata giustificazione, indicando in particolare le coordinate dei suoi punti di massimo e minimo relativi.